

БАЙЖАНОВ САЯН САМАТОВИЧ

О СОХРАНЕНИИ СВОЙСТВ ОБОГАЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЗАВИСИМЫХ ТЕОРИЙ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени
доктора философии (PhD) по специальности
6D060100 – «Математика»

Актуальность темы исследования. В настоящее время одним из основных направлений исследования в теории моделей, одной из ветвей математической логики, является обогащение моделей новыми отношениями.

Основополагающая тема в теории моделей заключается в классификации теорий первого порядка. Первым приближением в классификации было понятие Шелаха о стабильной *теории*. Который недавно был расширен и теперь включает в себя зависимые (NIP) теории.

Говорят теория T имеет свойство независимости (IP), если для какой-то формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ в каждой модели \mathfrak{M} теории T для каждого $n < \omega$, есть семейство кортежей $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$, такое, что для каждого подмножества I из n существует кортеж $\bar{a}_I \in \mathfrak{M}$ такой, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_I, \bar{b}_i) \Leftrightarrow i \in I$. Если такой формулы не существует, то говорят T является зависимой теорией (не имеет свойства независимости (NIP)).

Важной частью исследования полных теорий является изучение условий на новые отношения, необходимых и/или достаточных для изменения класса модели полной теории в новой сигнатуре или его сохранения. Одним из наиболее значительных классов полных теорий в зависимых (NIP) теориях наряду со стабильными теориями являются o -минимальные теории и более широкий класс, включающий o -минимальные теории – класс слабо o -минимальных теорий. Обе они являются классами строго упорядоченных теорий, так что для каждой модели этих теорий каждое определенное подмножество является конечным объединением интервалов для o -минимальной теории или выпуклых множеств для слабо o -минимальной теории. Эти классы теорий находятся в основной части исследований этой работы.

Ведущие специалисты в области теории моделей, такие как Б.И. Зильбер, Е. Хрущевский, А. Несин, Б. Пуаза, Г.Черлин, Д. Болдуин, Э. Бусарен, А. Вилки, Ч. Стейнхорн, Д. Макферсон, Д. Маркер, Б. Байжанов, С. Шелах, М. Бенедикт, А.Пиллай, получили глубокие результаты в различных проблемах обогащений.

Д. Болдуин и К.Холланд нашли достаточные условия для любого ω_1 -категоричного обогащения сильно минимальной модели унарными предикатами для того, чтобы она была модельно полной. Поле вещественных чисел,

элементарная теория которого допускает эллиминацию кванторов, разрешимо и о-минимально и обогащение унарной экспоненциальной функцией имеет модельно полную и о-минимальную теорию доказал Алекс Уилки. Б.С. Байжанов доказал, что в некотором элементарном расширении класс унарных частичных функций, определяемых параметрами, не совпадает с классом унарных частичных функций, определяемых с параметрами в исходном языке в этом расширении, тогда и только тогда, когда существует о-минимальное обогащение модели теории T , которая является плотной о-минимальной и допускает сокращение кванторов, будет существенным. Макферсон-Маркер-Стейнхорн доказали, что обогащение слабо о-минимальной структуры специальным видом выпуклых унарных предикатов сохраняет слабую о-минимальность. Б.С. Байжанов решил проблему обогащения слабо о-минимальных теорий унарным выпуклым предикатом. Б.Ш. Кульпешов получил характеристику слабо о-минимальных теорий с точки зрения выпуклости определимого множества один-типов и ввел понятие ранга выпуклости. Диссертация касается классификации обогащения слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости, который является относительно новым классом полных зависимых (NIP) теорий.

Другое направление исследований – внешне определяемые множества и обогащения, которые были представлены впервые Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном. Пусть $M = \langle M, \Sigma \rangle$, $N = \langle N, \Sigma \rangle$ - две структуры сигнатуры Σ такие, что $M < N$. Множество $A \subset M$ называется внешне определяемым, если $A = \varphi(N, a) \cap M$ для некоторой N -формулы, где $a \in N \setminus M$. Макферсон-Маркер-Стейнхорн доказали, что любое обогащение слабо о-минимальной теории, такое, что все типы одиночные, унарным выпуклым предикатом всегда внешне определяемо и слабо о-минимально.

Цели и задачи исследования.

Работа посвящена изучению вопросов сохранения некоторых свойств (слабо о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, модельная полнота, ранг выпуклости и другие) в рамках обогащения моделей. Цели работы следующие:

1. Исследовать вопросы сохранения определенных свойств моделей при обогащении унарными предикатами.
2. Исследовать вопросы сохранения определенных свойств моделей при обогащении отношениями эквивалентности.
3. Исследовать вопросы сохранения определенных свойств моделей при обогащении бинарными предикатами.

Основные положения защиты диссертации:

1. Сохранение как счетной категоричности, так и ранга выпуклости при обогащении модели счетно-категоричной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости конечным семейством выпуклых унарных предикатов.

2. Сохранение как счетной категоричности, ранга выпуклости и вполне о-минимальности при обогащении модели счетно-категоричной вполне о-минимальной теории конечным семейством выпуклых унарных предикатов.

3. Критерий сохранения как счетной категоричности, так и слабой о-минимальности (и, кроме того, 1-неразличимости) при обогащении модели 1-неразличимой счетно-категоричной слабо о-минимальной теории конечного ранга выпуклости отношением эквивалентности, разделяющим вселенную на бесконечно много бесконечных выпуклых классов.

4. Критерий для сохранения счетной категоричности для слабо о-минимального обогащения 1-неразличимой счетно-категоричной слабо о-минимальной теорией ранга выпуклости 1 произвольным бинарным предикатом.

5. Критерий для сохранения счетной категоричности для слабо о-минимального обогащения не-1-неразличимой счетно-категоричной слабо о-минимальной теорией ранга выпуклости 1 произвольным бинарным предикатом..

6. Сохранение слабой о-минимальности при обогащении слабо о-минимальной упорядоченной группы внешне определимым бинарным предикатом.

Объектами исследования являются полные зависимые (NIP) теории и их классы моделей. В частности, зависимые (NIP) теории включают стабильные теории и слабо о-минимальные теории.

Исследования субъектов модели зависимых (NIP) теорий, их свойства и свойства этих моделей при обогащении унитарными или бинарными предикатами или отношениями эквивалентности.

Методы исследования включают методы классической теории модели (например, метод элиминации квантора), в том числе те, которые были разработаны в теории моделей в 1980-х и позже. Среди них можно отметить методологию изучения упорядоченных структур, основанную на таких понятиях, как о-минимальность и варианты о-минимальности. В таких случаях обычно применяются строгие ограничения на наборы, определяемые по формуле с одной свободной переменной. Таким образом, о-минимальная структура M может рассматриваться как L -структура, где $L \supset L_0 = \{<\}, <$ - линейный порядок на M , и каждое определимое подмножество структуры M бескванторно. Это дает шаблон для других определений: заменить L_0 на какой-либо другой неизвестный язык, рассмотреть L -структуры, такие, что L_0 -редукт имеет определенный тип (например, линейный порядок), и мы требуем, чтобы каждое определимое подмножество структуры M (бескванторное) L_0 -определимое (мы можем попросить об этом для всех моделей этой теории). Кроме того, можно отметить методы изучения упорядоченных структур, разработанные за последние 20 лет, такие как описание моделей путем анализа поведения

определимых унитарных функций, изучение моделей с помощью классификации по рангу выпуклости и другие.

Научная новизна диссертационных исследований. Проблема сохранения свойств при обогащении моделей полных теорий, таких как зависимые (NIP) теории открыта в настоящее время. Классы теорий в рамках исследования не были исследованы на рассмотренные обогащения.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Исследования в направлении исследования диссертации представляют собой шаги в сторону классификации полных зависимых (NIP) теорий. Полученные результаты о природе обогащений могут быть применены к теории групп, колец и полей.

Связь диссертации с другими научно-исследовательскими работами. Диссертация была реализована в рамках научных проектов программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства образования и науки Республики Казахстан "Свойства типов в зависимых теориях" (2015-2017 годы, 5125/GF4)", "Основные и производные объекты для упорядоченных и генерирующих структурных объектов, а также элементарные теории" (2018-2020 годы, AP05132546) и "Консервативные расширения, подсчитываемые упорядоченные модели и операторы закрытия" (2018-2020 годы, AP05134992).

Одобрение работы. Результаты работы были представлены и обсуждены на многих зарубежных и отечественных международных научных конференциях и семинарах:

Шестой конгресс тюркского Всемирного математического общества (Астана, 2017);

Двенадцатая Международная летняя школа-конференция "Проблемы, связанные с универсальной алгеброй и теорией моделей" (Erlagol, Россия, 2017);

Международная конференция "Встреча Малцева" (Новосибирск, Россия, Институт математики, 2017, 2018);

AsL Европейское летнее совещание "Logic Colloquium" (Стокгольм, Швеция, 2017; Удине, Италия, 2018);

Ежегодное совещание ASL North American (Macomb, США, Университет Западного Иллинойса, 2018);

Шестой Всемирный конгресс и школа универсальной логики (Виши, Франция, 2018);

Шестнадцатая Азиатская логическая конференция (Nur-Sultan, 2019);

Ежегодная апрельская математическая конференция (Алматы, Институт математики и математического моделирования, 2017, 2018, 2019, 2020). ;

Научные семинары кафедры алгебры и математической логики Института математики и математического моделирования;

Результаты работы диссертации обсуждались с известными специалистами по теории моделей во время научной подготовки в Университете Лидс, Лидс, Великобритания.

Оценка полноты целей работы. Все результаты являются новыми и основаны на наших собственных методах и инструментах. Найдены условия сохранения либо слабой о-минимальности, счетной категоричности при обогащении унарными, либо бинарными предикатами. Поэтому задачи работы были полностью выполнены.

Предложения по заявкам на полученные результаты. Результаты полученные в этой области теории моделей могут быть использованы при изучении моделей зависимых (NIP) теорий, в частности обогащения слабо о-минимальных теорий. Результаты обогащения внешне определимыми множествами могут быть применены к теориям алгебраических структур.

Оценка научного уровня работы по сравнению с достижениями в научном направлении. Полученные результаты не проигрывают при сравнении с достижениями зарубежных коллег и вносят вклад в изучение обогащения моделей полных теорий.

Публикации. Основные результаты диссертации были опубликованы в 20 работах, в том числе 3 статьи, опубликованные в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор в соответствии с международными базами данных Web of Science и (или) Scopus; 5 статей, опубликованных в отечественных журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, и 12 работ в материалах международных научных конференций.

Объем и структура диссертации. Работа включает титульный лист, содержание, нормативные ссылки, определения, обозначения и сокращения, 5 разделов, выводы и ссылки. Общий объем диссертации 76 страниц, работа содержит 4 иллюстрации и 101 литературных источника.

Основное содержание диссертационные работы. Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, цели работы, основные положения выносимые на защиту диссертации, объект и субъект исследования, методы исследования, научную новизну и практическую значимость диссертационной работы, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробацию работы, публикации автора и объем, структуру и содержание диссертации.

В первом разделе приводится историческая справка и объясняется текущее состояние исследуемой области теории моделей.

Второй раздел диссертации дает предварительную информацию и рассматривает обогащение моделей унитарными предикатами.

Третий раздел посвящен обогащениям отношениями эквивалентности счетно-категоричных, слабо о-минимальных теорий. Найден критерий сохранения счетно-категоричности и слабой о-минимальности.

В четвертом разделе диссертации рассматривается произвольное бинарное обогащение моделей 1-неразличимых и не-1-неразличимых счетно-категоричных, слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Раздел пять ориентирован на класс внешне определимых обогащений в области сохранения модельной полноты.

Для пояснения основного результата также приводятся различные примеры обогащений, которые не сохраняют определенных свойств.

В заключительном разделе работы приводятся и обобщаются основные результаты, полученные за период выполнения диссертации.